Exercice : 1 (7 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$; $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - 3u_n + 2u_{n-1} = 0$

1) Calculer u_2 et u_3.
2) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - 2u_n = u_n - 2u_{n-1}$

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - 2u_n = -3$
3) Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + a$ avec 'a' un réel donné.

   a) Montrer que $v_{n+1} = 2(u_n + \frac{a-3}{2})$

   b) Déduire la valeur de 'a' pour que (v_n) soit géométrique de raison 2.
4) **Dans la suite de l'exercice on prendra <u>a = - 3</u>**

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) Donner le terme général de (v_n) puis celui de (u_n) en fonction de n.
5) Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n$ en fonction de n.

Exercice : 2 (8 points)

ABC est un triangle, on pose $AB = c$ $AC = b$ et $BC = a$. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) Faire une figure claire en prenant les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ aigus.
2) a) Montrer que $b = \frac{a.\sin\hat{B}}{\sin\hat{A}}$ et que $c = \frac{a.\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$.

   b) Exprimer BH en fonction de c et $\hat{B}$.

   c) Exprimer CH en fonction de b et $\hat{C}$.

   d) En déduire que $a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$.
3) a) En utilisant les questions 2) a) et 2) d) Montrer que $\sin\hat{A} = \sin\hat{B}.\cos\hat{C} + \sin\hat{C}.\cos\hat{B}$

   b) En déduire que $\sin(\hat{B} + \hat{C}) = \sin\hat{B}.\cos\hat{C} + \sin\hat{C}.\cos\hat{B}$
4) a) Montrer que $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}$

   b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ puis montrer que $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
5) a) Calculer l'aire d'un triangle ABC sachant que $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ et $\hat{C} = \frac{\pi}{12}$.

   (on donne $S = \frac{1}{2}a.b.\sin\hat{C}$)

   b) Utiliser le théorème d'El-Kashi pour montrer que $c = \sqrt{3} - 1$.

   c) En déduire la valeur de R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Exercice : 3 (5 points)

ABC est un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle Γ de centre O et de rayon R=3. On note r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Faire une figure.

2) Montrer que $AB = 3\sqrt{3}$. (on rappel que dans un triangle $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$)

3) M est un point de l'arc $[AB]$ ne contenant pas C.

a) Construire $I = r(M)$.

b) Montrer que IAM est équilatéral.

c) Montrer que $I \in [CM]$.

d) Montrer que $MA + MB = MC$.

4) **On prendra dans la suite de l'exercice** $AM = 3\sqrt{2}$**.**

a) Utiliser la loi de sinus dans le triangle ABM pour montrer que $A\hat{B}M = \frac{\pi}{4}$.

b) Donner l'angle de la rotation r' de centre A qui transforme M en M' avec $M' \in [AB]$.

<u>Bon travail</u>